E.N.S. ULM-SEVRES session 1987

**Groupe B**

# MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

*Introduction*

On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions numériques $f$ définies et de classe $C^1$ sur un intervalle ouvert contenant $[-1, 1]$ et telles que :

(1) $$f(1) = f(-1) = 0.$$

(2) $$\forall x \in ]-1, 1[ , \quad f(x) > 0.$$

On appelle $\gamma_f$ le graphe, dans un repère orthonormé, de la restriction de $f$ à $[-1, 1]$ et A = (− 1,0) ; B = (1.0) les extrémités de $\gamma_f$.

On note C l'intersection des tangentes à $\gamma_f$ en A et B (si elle est unique) et T le triangle ABC.

En posant $M = \sup_{x \in [-1,1]} f(x)$, on appelle R le rectangle ABDE, avec D = (1,M) et E = (− 1,M).

On note $\mathcal{A}(f)$ l'aire comprise entre $\gamma_f$ et sa corde AB, $\mathcal{R}(f)$ l'aire du rectangle R et $\mathcal{T}(f)$ l'aire du triangle T (si $\gamma_f$ est tangent à AB en A ou B, on pose $\mathcal{T}(f) = 0$).

Les parties 3 et 4 sont indépendantes entre elles.



## PREMIÈRE PARTIE

1.1. On considère la fonction $p_0 \in \mathcal{F}$ définie par : $p_0(x) = 1 - x^2$.
Calculer $\mathcal{A}(p_0)$, $\mathcal{R}(p_0)$ et $\mathcal{T}(p_0)$.

1.2. Soient $m_1$, $m_2$ deux nombres $> 0$ distincts.
Montrer qu'il existe une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ transformant $\gamma_{p_0}$ en un arc de parabole $\gamma_p$ avec : $p \in \mathcal{F}$ ; $p'(-1) = m_1$ ; $p'(1) = -m_2$.
Calculer $\mathcal{A}(p)$, $\mathcal{R}(p)$ et $\mathcal{T}(p)$.
Montrer que $p$ s'écrit sous la forme $p(x) = \dfrac{1 - x^2}{u(x)}$ pour $x \in [-1, 1]$ avec, de plus, $u''(x) < 0$ pour $x \in ]-1, 1[$.

1.3. On appelle $\mathcal{P}$ l'ensemble défini par :

$$g \in \mathcal{P} \Leftrightarrow g \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad g \text{ est une fonction polynôme.}$$

On pose :

$$t = \left\{ \frac{\mathcal{T}(g)}{\mathcal{A}(g)} \;\middle|\; g \in \mathcal{P} \right\},$$

$$r = \left\{ \frac{\mathcal{R}(g)}{\mathcal{A}(g)} \;\middle|\; g \in \mathcal{P} \right\}.$$

Calculer sup $t$, inf $t$, sup $r$, inf $r$ dans $[0, +\infty]$.

## DEUXIÈME PARTIE

On définit l'ensemble de fonctions $\mathcal{E}$ comme suit :

$$f \in \mathcal{E} \Leftrightarrow f(0) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{ax}(1 - x^2)\, q(x)$$

où $a$ est un nombre réel et $q$ un polynôme dont toutes les racines sont réelles et de valeurs absolues strictement supérieures à 1 (i.e. $q$ est de la forme :

$$q(x) = \alpha \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}$ et $|x_i| > 1$).

**Tournez la page S. V. P.**

On a donc $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$.

Soient $m_1$, $m_2$ des nombres $> 0$. On définit $\mathcal{E}_{m_1, m_2}$ par :

$$f \in \mathcal{E}_{m_1, m_2} \Leftrightarrow f \in \mathcal{E} \quad \text{et} \quad f'(-1) = m_1 , \quad f'(1) = -m_2 .$$

Soient $x_0 \in ]-1, 1[$ et $M_0 > 0$. On définit $\overline{\mathcal{E}}_{x_0, M_0}$ par :

$$f \in \overline{\mathcal{E}}_{x_0, M_0} \Leftrightarrow f \in \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \sup_{x \in [-1,1]} f(x) = f(x_0) = M_0 .$$

2.1. Soient $f, g$ des éléments de $\mathcal{E}_{m_1, m_2}$ (resp. $\overline{\mathcal{E}}_{x_0, M_0}$), avec $f(x) = e^{ax}(1 - x^2)\, q(x)$ et $g(x) = e^{bx}(1 - x^2)\, r(x)$.

On suppose que $r$ divise $q$, $r \neq q$.

Montrer que $\forall x \in ]-1, +1[$, on a : $g(x) < f(x)$ (resp. $f(x) < g(x)$ pour $x \neq x_0$). (On étudiera $\ln f - \ln g$.)

2.2. On ordonne l'ensemble $\mathcal{E}$ par la relation suivante :

$$f \leqslant g \Leftrightarrow \forall x \in [-1, 1] , \quad f(x) \leqslant g(x) .$$

Montrer qu'il existe dans l'ensemble $\mathcal{E}_{m_1, m_2}$ (resp. $\overline{\mathcal{E}}_{x_0, M_0}$) une borne inférieure $\varphi$ (resp. supérieure $\overline{\varphi}$).

Dans quel cas $\varphi$ (resp. $\overline{\varphi}$) est-il un polynôme?

2.3. On suppose $m_1 \neq m_2$ (resp. $x_0 \neq 0$).

Montrer que la parabole $p \in \mathcal{F}$ telle que $p'(-1) = m_1$, $p'(1) = -m_2$ (cf. 1.2.)

(resp. la parabole $\overline{p} \in \mathcal{F}$ telle que $\sup_{x \in [-1,1]} \overline{p}(x) = \overline{p}(x_0) = M_0$) vérifie :

$\forall x \in ]-1, 1[$ , $p(x) < \varphi(x)$ (resp. $\overline{\varphi}(x) < \overline{p}(x)$ pour $x \neq x_0$).

2.4. Déduire de ce qui précède que pour $f \in \mathcal{E}$ telle que $f'(-1) \neq -f'(1)$ on a :

$$\frac{2}{3}\, \mathcal{C}(f) < \mathcal{A}(f) < \frac{2}{3}\, \mathcal{R}(f) .$$

Quand a-t-on des égalités?

Généraliser ces inégalités lorsqu'on remplace l'intervalle $[-1,1]$ par $[-a,a]$.



## Troisième partie

3.1. Soit $\alpha$ un nombre réel $> 0$. On considère la suite de fonctions $h_n$ définie pour $n > \alpha$ et $x \in [-\alpha, \alpha]$ par :

$$h_n(x) = x - n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Montrer que $h_n$ converge vers 0 uniformément sur $[-\alpha, \alpha]$.

3.2. Soit $f$ un élément de $\mathcal{E}$. Montrer que $f$ est limite uniforme sur $[-1, 1]$ d'une suite $f_n$ d'éléments de $\mathcal{P} \cap \mathcal{E}$.

## Quatrième partie

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)\,(9(x+y)^2 + 4(x-y)^2 - 36)\,(y^2 - x^2 + 1)\,(x - 1 - y^2) .$$

Soit D le disque unité centré à l'origine.

4.1. Montrer que l'on a l'inégalité :

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy < \frac{2\pi}{3} \sup_{(x,y) \in D} f(x, y) .$$

(On pourra dessiner sommairement l'ensemble des points où $f$ s'annule et utiliser 2.4.).

4.2. Montrer que l'on a la même inégalité pour la fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$g(x, y) = f(x, y)\left((x - 3)^2 + y^2 - \frac{1}{4}\right).$$

* * *

page 36 1987 E.N.S. ULM-SEVRES Groupe B-